金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程

数物科学専攻IIコース入試参考問題

専門科目

数学

$\boxed{\mathbf{1}}$　連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{cases}$$

を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ の全体を V とする。以下の問いに答えよ。

(1) V は $\mathbf{R}^4$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

(2) V の基底を一組求めよ。

(3) $\mathbf{R}^4$ における V の直交補空間 $V^\perp$ の基底を一組求めよ。ただし，直交補空間 $V^\perp$ とは V のすべてのベクトルと直交する $\mathbf{R}^4$ のベクトル全体のなす $\mathbf{R}^4$ の部分ベクトル空間である。また，直交性は標準的な内積に関するものとする。

$\boxed{\mathbf{2}}$　V を有限次元実ベクトル空間とし，写像 $f : V \longrightarrow V$ は線形，すなわち，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ および任意のスカラー $c \in \mathbf{R}$ に対して 2 つの性質

$$\text{(i)}\quad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad \text{(ii)}\quad f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$$

が成り立つものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が 1 次独立であるとする。もし f が単射ならば，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)$ も 1 次独立であることを示せ。またこのことを用いて，f が単射ならば全射でもあることを示せ。

(2) f が全単射であるとき，逆写像 $f^{-1} : V \longrightarrow V$ も線形であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 正方行列 A の特性方程式（固有方程式）の定義を述べよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。さらに固有値を λ, μ とするとき,

$$ {}^{t}PAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} $$

を満たす 2 次行列 P を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ に対して $A = LU$ が成り立つような下三角行列 $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$ と上三角行列 $U = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$ を求めよ。さらに $B = UL$ を計算せよ。

(2) (1) の行列 A と行列 B に対して,

$$ \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B, \quad \det A = \det B $$

となることを示せ。また A, B の固有値は一致することを示せ。

(3) 行列 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(a_n \neq 0)$ を A として (1) の操作によって得られる行列 B を $A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}$ とする。$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ から始めて帰納的に $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ と定めるとき，数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は漸化式

$$ a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 1) $$

を満たすことを示せ。

(4) (3) で得られる行列の列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ は $n \to \infty$ で $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ の形の行列に収束することが分かっている。簡単に理由を述べて λ の値を答えよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$　実ベクトル空間 $V = \mathbf{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \\
W_2 &= \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
$$

により定める。

(1) W_1 と W_2 の次元および基底を求めよ。

(2) $W_1 + W_2$ の次元および基底を求めよ。

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元および基底を求めよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$　次の実対称行列 A を直交行列により対角化せよ。

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$\boxed{\mathbf{7}}$　次の問いに答えよ。

W を次の連立方程式の解が満たす $\mathbf{R}^5$ の部分ベクトル空間とする。

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 - x_2 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

(1) W の基底を求めよ。

(2) W の正規直交基底を求めよ。

$\boxed{8}$　次の問いに答えよ。

(1) 次の正方行列 A の階数を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 次正方行列 B (対角成分は n，それ以外は 1) の階数を求めよ。

$$B = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

(3) n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ は $c_{ii} = n$, $|c_{ij}| < 1 (i \neq j)$ を満たすとする。このとき，C は正則であることを示せ。

$\boxed{9}$　3 次以下の多項式の全体 $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間をなす。V 上の線形写像 f を

$$f(u) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\frac{d^2 u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - 3u, \qquad (u \in V)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbf{R}$ に対し，次式を満たす 4 次実正方行列 A を求めよ。

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

(2) 線形写像 f の固有値をすべて求めよ。また，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3) $u \in V$ に対し，帰納的に

$$f^1(u) = f(u), \qquad f^{k+1}(u) = f(f^k(u)) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

と定める。このとき $v = x^2 - x$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{2n}} f^{2n}(v)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x=0$ で連続か。

(2) $x=0$ での $f(x)$ の右側微分係数 $f'_+(0)$，左側微分係数 $f'_-(0)$，および微分係数 $f'(0)$ のそれぞれに対し，存在するものはその値を求め，存在しないものについてはその理由を述べよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ 関数 $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$P(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$$

と定義する。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数をあらわす。例えば $[3]=3,\ [3.14]=3,\ [-3.14]=-4$ である。

(1) 関数 $y = P(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) 次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_1^n \frac{P(x)}{x}dx = 0.$$

(3) $f : [1,n] \longrightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級関数とする。以下の等号が成り立つことを示せ。

$$\int_1^n P(x)f'(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx - \frac{1}{2}(f(1)+f(n)).$$

(4) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!) - n\log n}{n}$$

を求めよ。ただし，$n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$ である。

$\boxed{\mathbf{12}}$　以下の問いに答えよ。

(1) 正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在し，その値は 1 より小さいとする。このとき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを証明せよ。

(2) 関数 $f(x) = e^x$ を原点 $x = 0$ でのテーラー展開で表せ。また，その級数が任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して収束することを示せ。

$\boxed{\mathbf{13}}$　C^2 級関数 $f(x, y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ (ただし $r > 0$，$0 \leq \theta < 2\pi$) をおこなって得られる変数 r, θ の関数 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を $g(r, \theta)$ と書く。このとき次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$　$0 < \alpha < 1$ を定数とする。$\mathbf{R}^2$ の部分集合 A, B を

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq \alpha,\ y > 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$

とする。重積分

$$\iint_{A\cap B} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

を計算せよ。

$\boxed{\mathbf{15}}$　次の問いに答えよ。

(1) 次の関数 $f(x)$ は原点 $x = 0$ を含むすべての実数 x で微分可能であるが，導関数 $f'(x)$ は原点で不連続なことを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (\,x \neq 0 \text{ のとき}\,), \\ 0 & (\,x = 0 \text{ のとき}\,). \end{cases}$$

(2) 広義積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

は収束することを示せ。

$\boxed{\textbf{16}}$ 以下の問いに答えよ。ただし e は自然対数の底である。

(1) n を任意の自然数とするとき，$x > 0$ に対して不等式

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) を用いて，任意の正数 α に対して

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) を用いて，任意の正数 α に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\textbf{17}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(i) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ。

(ii) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2) (i) $0 \leq x \leq 1$ において，$1 - x^4 \leq 2(1 - x^2)$ を示せ。

(ii) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)}}.$$

(iii) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{18}}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数 $u = f(x,y)$ に対して，極座標変換 $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ を行ったとき，$r \neq 0$ において次式を r,θ による微分を用いて表せ。

(i) $u_x^2 + u_y^2$, (ii) $u_{xx} + u_{yy}$.

(2) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束することを示せ。

(ii) 広義重積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$ は収束することを示せ。

(iii) 広義重積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$ の値を求めよ。

(iv) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{19}}$ 次の関数の原点 $(0,0)$ における連続性を調べよ。また連続であった場合，全微分可能かどうか調べよ。

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{20}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2} = 12$ が成り立つように定数 a と b を定めよ。

(2) 関数 $f(x) = \log(e^{2x}+e^x+1)$ について，極限 $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。また，この α を用いて極限 $\beta = \displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-\alpha x)$ を求めよ。さらに $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 関数 $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ のテーラー展開を求めよ。また $x = 0$ で極値を取るかどうか調べよ。

基礎物理学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 質量 m の質点 A が，原点に固定された質量 M の質点 B から万有引力を受けて運動している．時刻 t における A の位置を $\boldsymbol{r}(t)$ とし，万有引力定数を G とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ を $\boldsymbol{r}$ で表せ．

(2) A が受ける力 $\boldsymbol{F}$ を表せ．

(3) $\boldsymbol{h} \equiv \dfrac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ とする．$\boldsymbol{h}$ が保存することを示せ．なお，上付きの点は時間微分を表す．

(4) A の軌道はある平面内にあることを示せ．

(5) (4) の平面内において，A の極座標系での位置を (r, θ) と表す．$|\boldsymbol{h}|$ を r, θ で表せ．

(6) $\boldsymbol{h}$ の物理的意味を図を使って説明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ z 軸方向を向いた一様な磁場$\boldsymbol{B}$の中を質量 m，電荷 q の粒子がローレンツ力を受けて運動している．簡単のため，粒子は磁場に垂直な平面内で運動しているものとする．時刻 t における粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は運動方程式

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

に従う．x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ として，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t における粒子の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), 0)$ とする．$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z, \omega = \frac{qB}{m}$ として，$v_x(t), v_y(t)$ の微分方程式を書け．

(2) (1) の微分方程式から v_y を消去することで，v_x の微分方程式を書け．また，この方程式と同型の微分方程式を与える物理現象を一つ挙げよ．

(3) (2) の微分方程式の一般解を求めることで，$v_x(t), v_y(t)$ の一般解を求めよ．

(4) $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ として，$v_x(t), v_y(t)$ を求めよ．

(5) (4) で与えられる運動はどのような軌跡を与えるか．概略を述べよ．

さらに y 軸方向を向いた一様な電場 $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_y$ をかけると，運動方程式は

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E}$$

となる．このとき以下の問いに答えよ．

(6) 上の微分方程式を xy 平面内のある一定な速度ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ を用いて変形すると

$$m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = q(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) \times \boldsymbol{B}$$

となる．このときの $\boldsymbol{v}_0$ を求めよ．

(7) 粒子の運動の概略図を書け.（初期位置，初期速度は適当に定めよ.）

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下はすべて真空中であるとする．必要な場合には真空の透磁率を μ_0 とし，誘電率を ε_0 とせよ．

(1) 図 1(a) のような原点 O を中心とする半径 a の導体球殻を考える．この球殻に電荷 q を与えて一様に分布させる．球殻が孤立しているとする．

(a) 原点から距離 r の点における電場の大きさ E を求めよ．また電場の向きはどちら向きか答えよ．

(b) 原点から距離 r の点における電位 $\phi(r)$ を求めよ．ただし，無限遠方で $\phi = 0$ とする．

(2) 図 1(b) のように，中心を O とする半径 r_1 と半径 r_2 の 2 つの導体の同心球殻を考える．

(a) 半径 r_1 の球殻に電荷 q_1 を与え，半径 r_2 の球殻を接地する．

(i) 原点から距離 r の点での電位 $\phi(r)$，および電場の大きさ E を求めよ．電場の向きはどちら向きか答えよ．

(ii) この球状コンデンサーの電気容量を求めよ．また，蓄えられる静電エネルギーを求めよ．

(b) 半径 r_2 の球殻に電荷 q_2 を与え，半径 r_1 の球殻を接地する．

(i) 原点から距離 r の点での電位 $\phi(r)$，および電場の大きさ E とその向きを求めよ．

(ii) 蓄えられる静電エネルギーを求めよ．

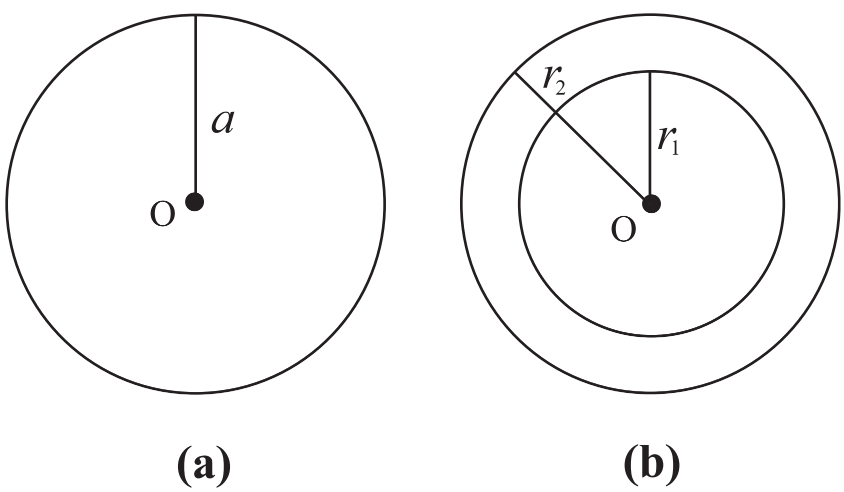

図 1:

$\boxed{\mathbf{4}}$ 半径 a の円環に電流 I が下図のように流れているとする．

(1) この円環付近周辺（環の内側も含む）の磁力線を描け．ただし，円環の太さは a に対して無視できるとし，できるだけ分かりやすい図を作成せよ．

(2) 中心 O を通り，円環を含む面に垂直な直線上での磁束密度の大きさを，点 O からの距離の関数として求めよ．

(3) 円環上の点 P を中心とし，点 O を通る円周 C に対してアンペールの法則を適用する．適用した結果を説明せよ．ただし，円周 C は円環と垂直であるとする．

(4) 電流が流れる全く同様の円環（電流の大きさおよび向きも同じ）を共通の平面内に置いたまま，2 つの円環の中心を近づけた．2 つの円環に働く力を理由を付して説明せよ．

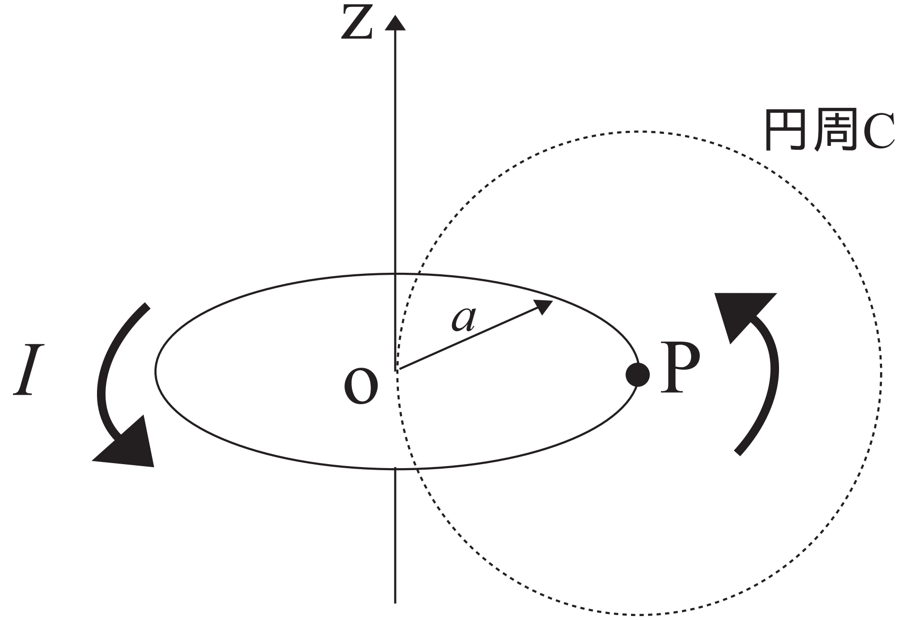

図 2:

$\boxed{\mathbf{5}}$ 図のように，上向き，下向きの２つの方向をとれるスピン２つがあるとする．この系のハミルトニアンは以下であるとする．

$$H = \quad -JS_1S_2 \qquad (J > 0,\ S_i = \pm 1,\ i = 1, 2).$$

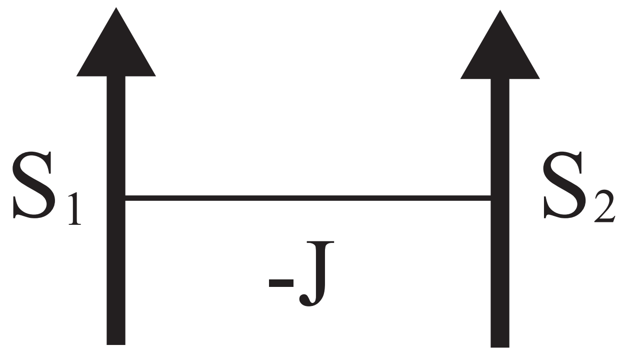

図 3:

(1) このスピン２個の系はどのような状態をとれるか？ 図示して，それぞれの場合のエネルギーを書け．

このスピン２個の系が独立に N 個あり，温度 T が一定であるとき，以下の問いに答えよ．

(2) この系の分配関数を書け．

(3) この系のエネルギー E，比熱 C を求めて，温度の関数として図示せよ．

6 正方形の箱の中に，粒子２個から成る分子がある（図中の白い丸が粒子である）.

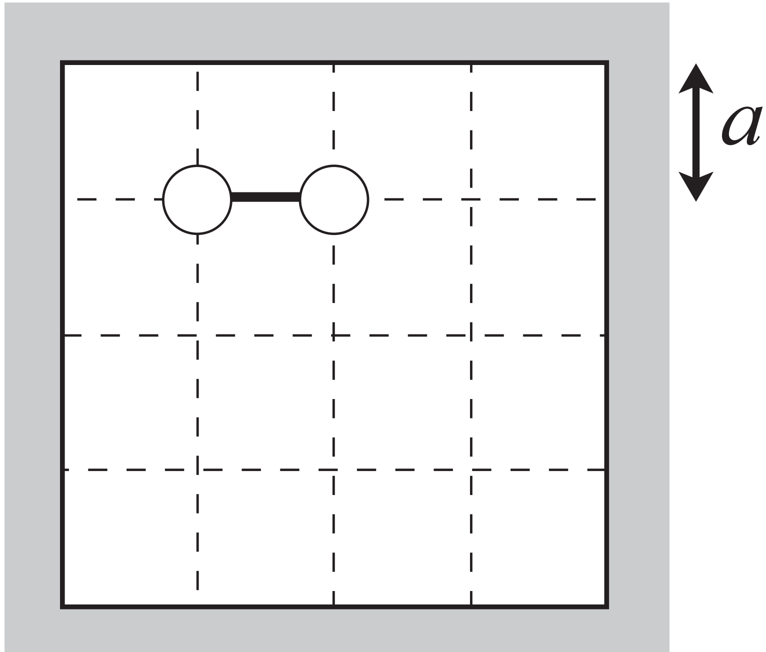

図 4:

粒子２個の距離は常に a，箱の１辺は $4a$ とし，粒子は格子点（図の点線の交点９個）のみに存在できるとする．粒子と壁の間の相互作用は，壁と距離 a にある粒子については $-2J$，また壁と距離 $2a$ にある粒子については $-J$ とする．ただし $J > 0$ である．その他の相互作用は無視したとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱の中でこの分子が取り得る可能な配置をすべて書け．ただし，適当な方法で分類して説明し，それぞれのエネルギーも書け．

このような系が独立に N 個あり，温度 T が一定であるとき，以下の問いに答えよ．

(2) この系の分配関数を書け．

(3) エネルギーと比熱を求めよ．

(4) エネルギーと比熱を温度の関数として図示せよ．低温および高温での系の振る舞いに関して議論せよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 1 次元の有限な区間 $0 \le x \le a$ に閉じ込められている質量 m の粒子を考える．また区間 $0 \le x \le a$ では力を受けないとし，区間外では粒子は存在しないとする．

(1) 区間 $0 \le x \le a$ でのハミルトニアンを書け

(2) 波動関数の境界条件を書け．

(3) 波動関数とエネルギーを求めよ．

(4) 基底状態と第一励起状態が直交していることを示せ．

(5) 位置 x の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 質量 m を持つ粒子が運動する場合について次の問題に答えよ．

(1) 古典力学における角運動量の x, y, z 成分を示せ.

(2) 軌道角運動量演算子 L の x, y, z 成分を表せ.

(3) それらの角運動量演算子の交換関係を示せ.

(4) L^2 と角運動量演算子の x, y, z 成分が可換であることを示せ.

(5) 角運動量演算子を極座標変換せよ.

計算機

$\boxed{\mathbf{1}}$ 方程式

$$x = f(x) \tag{1}$$

の解 x を以下の数値解法で求める。

1. 解 x の初期近似解 $x^{(0)}$ を設定する。
2. $x^{(0)}$ を式 (1) の右辺に代入して，第 1 近似解 $x^{(1)}$ を $x^{(1)} = f(x^{(0)})$ で定める。
3. 同様に第 $k+1$ 近似解 $x^{(k+1)}$ を

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) \tag{2}$$

で定める。$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

近似解の列 $\{x^{(k)}\}_{k\,=\,0,1,\cdots}$ の収束した値が方程式 (1) の解である。

(a) 第 k 近似解 $x^{(k)}$ と方程式 (1) の解 x_t との誤差 $e^{(k)}$ は

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x_t$$

である。よって式 (2) に代入すると

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) = f(x_t + e^{(k)}) \tag{3}$$

となる。式 (3) の右辺を x_t のまわりで 2 次の項までテーラー展開せよ。

(b) (a) で求めた式を用いて，$k+1$ 回目の誤差 $e^{(k+1)}$ と k 回目の誤差 $e^{(k)}$ の関係を示せ。

(c) 誤差 $e^{(k)}$ の 2 次の項を無視する時，近似解が収束するための条件を示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 方程式 $f(x) = 0$ の数値解を「ニュートン法」で解きたい。ニュートン法では適切な初期値 $x^{(0)}$ を出発点として，

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

を繰り返して真の解に近い数値解を求める。（上付きの添字は繰り返し回数を表す）ここではニュートン法を用いて，方程式

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \tag{4}$$

の数値解を 0.001 の誤差の範囲で求める。

(a) 初期値 $x^{(0)}$ を与えて方程式 (4) の数値解を求めるプログラムを書け。プログラム言語はフォートランか C とすること。

(b) 方程式 (4) の真の解のうちの一つである $x = -2$ の数値解を求めたい場合，初期値 $x^{(0)}$ をどのような範囲に設定すればよいか答えよ。

(c) 初期値 $x^{(0)} = 2$ に設定すると，初期値 $x^{(0)} = -3$ に設定して計算した時よりもニュートン法の繰り返し回数が増えた。その理由を述べよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$　ユークリッドの互除法を用いて整数 m, n の最大公約数を求める関数 int igcd (int m, int n) を C 言語で作成せよ。

ただし，ユークリッドの互除法とは以下のような方法である。自然数 m と n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表すことにする。自然数 $m > n$ が関係 $m = qn + r (0 < r < n)$ を満たすとき，$\gcd(m, n) = \gcd(n, r)$ であることはよく知られている。したがって，余りが 0 になるまで割り算を繰り返すことによって，自然数 m, n の最大公約数を求めることが出来る。